Николаю Алексеевичу
Умову
от автора

# ОБЪ ОДНОМЪ СПОСОБѢ

# ПОЛУЧЕНІЯ ОБЩИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ

## НѢКОТОРЫХЪ СИСТЕМЪ

## ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ

Д. Н. Зейлигера.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго университета.
1897.

Печатано по определенію Физико-математическаго факультета Императорскаго Казанскаго Университета.

Деканъ *Дубяго*.

# Объ одномъ способѣ полученія общихъ интеграловъ нѣкоторыхъ системъ дифференціальныхъ уравненій.

I.

§ I. Пусть $u_i$, $v_i$, $w_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots n)$—$3n$ функцій независимаго перемѣннаго $t$, удовлетворяющихъ $k$ условнымъ уравненіямъ:

$$1) \quad f_1=0,\ f_2=0, \ldots f_k=0,\ (3n-k=\mu>0)$$

въ которыя можетъ входить и перемѣнное $t$. Положимъ для краткости:

$$2) \quad \frac{du_i}{dt}=u'_i\,,\ \frac{dv_i}{dt}=v'_i\,,\ \frac{dw_i}{dt}=w'_i\,,$$

и разсмотримъ $3n$ уравненій:

$$3)\left\{\begin{aligned} m_i\frac{d}{dt}\left(\frac{u'_i}{u_i^2+v_i^2+w_i^2}\right) &= L_i+\sum_{s=1}^{s=k}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial u_i}\,, \\ m_i\frac{d}{dt}\left(\frac{v'_i}{u_i^2+v_i^2+w_i^2}\right) &= M_i+\sum_{s=1}^{s=k}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial v_i}\,, \quad (i=1, 2, 3, \ldots n) \\ m_i\frac{d}{dt}\left(\frac{w'_i}{u_i^2+v_i^2+w_i^2}\right) &= N_i+\sum_{s=1}^{s=k}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial w_i}\,, \end{aligned}\right.$$

гдѣ $m_1$, $m_2$,... $m_n$ — $n$ данныхъ постоянныхъ количествъ, $L_i$, $M_i$, $N_i$—$3n$ данныхъ функцій отъ $t$, всѣхъ $u$, $v$ и $w$ и производныхъ $u'$, $v'$, $w'$; $\lambda_1$, $\lambda_2$,... $\lambda_k$—$k$ неизвѣстныхъ функцій отъ тѣхъ же величинъ.

$3n+k$ уравненій 1) и 3) совершенно достаточно для опредѣленія $3n+k$ неизвѣстныхъ функцій $u$, $v$, $w$ и $\lambda$. Легко видѣть, что при данныхъ начальныхъ значеніяхъ величинъ $t$, $u$, $v$, $w$, $u'$, $v'$, $w'$ получится лишь одна система искомыхъ величинъ. Слѣдовательно, при тѣхъ же условіяхъ будетъ единственной система

$$du_i = u'_i\,dt,\; dv_i = v'_i\,dt,\; dw_i = w'_i\,dt\,,$$

которая въ силу 1) должна удовлетворять $k$ уравненіямъ:

$$4)\; \frac{\partial f_s}{\partial t_s}\,dt + \sum_i \left(\frac{\partial f_s}{\partial u_i}\,du_i + \frac{\partial f_s}{\partial v_i}\,dv_i + \frac{\partial f_s}{\partial w_i}\,dw_i\right) = df_s = 0.\; (s=1,2,\dots k)$$

Назовемъ теперь *варіацiями* безконечно-малыя измѣненія ($\delta u_i$, $\delta v_i$, $\delta w_i$) величинъ $u_i, v_i$, $w_i$, опредѣляемыя $k$ уравненіями:

$$5)\quad \sum_i \left(\frac{\partial f_s}{\partial u_i}\,\delta u_i + \frac{\partial f_s}{\partial v_i}\,\delta v_i + \frac{\partial f_s}{\partial w_i}\,\delta w_i\right) = \delta f_s = o,\; (s=1,\, 2,\, 3, \dots k)$$

и будемъ говорить, что данная система варіяцій допускается условными уравненіями, если она обращаетъ уравненія 5) въ тожества. Такъ какъ $3n$ варіяцій опредѣляются лишь $k$ уравненіями 5), то въ силу неравенства

$$3n - k = \mu > o$$

заключаемъ, что условныя уравненія 1) допускаютъ множество системъ варіяцій, между которыми лишь $\mu$ независимыхъ между собой. Сопоставляя уравненія 4) съ 5), приходимъ къ выводу, что система $du$, $dv$ и $dw$ совпадетъ съ одной изъ этихъ системъ $\delta u$, $\delta v$, $\delta w$ лишь въ случаѣ,

$$6)\quad \frac{\partial f_s}{\partial t} = o \;\; (s = 1,\, 2, \dots k)\,,$$

т. е., если $t$ не входитъ въ условныя уравненія.

Благодаря опредѣленію 5) варіяцій, можно систему уравненій 3) замѣнить одной формулой.

Умножимъ ихъ для этого на $\delta u_i$, $\delta v_i$ и $\delta w_i$ соотвѣтственно, сложимъ произведенія и возьмемъ сумму по $i$. Тогда въ силу 5) найдемъ:

$$\text{A)}\quad \sum_i m_i \left\{ \delta u_i \frac{d}{dt}\left(\frac{u'_i}{u_i^2+v_i^2+w_i^2}\right) + \delta v_i \frac{d}{dt}\left(\frac{v'_i}{u_i^2+v_i^2+w_i^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \delta w_i \frac{d}{dt}\left(\frac{w'_i}{u_i^2+v_i^2+w_i^2}\right)\right\} = \sum_i (L_i \delta u_i + M_i \delta v_i + N_i \delta w_i)\,.$$

Обратно, исходя изъ этой формулы и обращая вниманіе на опредѣленіе 5) величинъ $\delta u$, $\delta v$, $\delta w$, можно придти къ системѣ 3). Такимъ образомъ послѣдняя система и формула А) равнозначущи.

Формулу А) будемъ называть *основной.*

§ II. Пусть $A_i$, $B_i$, $C_i$ — $3n$ функцій отъ $t$, $u$, $v$, $w$, $u'$, $v'$ и $w'$. Допустимъ, что эти функціи обращаютъ въ тождества уравненія:

$$7)\quad \sum_i \left(A_i \frac{\partial f_s}{\partial u_i} + B_i \frac{\partial f_s}{\partial v_i} + C_i \frac{\partial f_s}{\partial w_i}\right) = o. \quad (s=1,\ 2,\ 3, \dots\ k)$$

Система

$$8)\quad \delta u_i = A_i \tau,\ \delta v_i = B_i \tau,\ \delta w_i = C_i \tau,$$

гдѣ $\tau$ — безконечно-малая величина, въ силу 5) и 7) допускается условными уравненіями. Величины $A$, $B$ и $C$ назовемъ *коэффиціентами* системы варіяцій 8)

Внеся значенія 8) въ $A$), найдемъ, отбросивъ общій множитель $\tau$:

$$\text{A}')\quad \sum_i m_i \left\{ A_i \frac{d}{dt}\left(\frac{u'_i}{u_i^2+v_i^2+w_i^2}\right) + B_i \frac{d}{dt}\left(\frac{v'_i}{u_i^2+v_i^2+w_i^2}\right) + \right.$$

$$\left. + C_i \frac{d}{dt}\left(\frac{w'_i}{u_i^2+v_i^2+w_i^2}\right)\right\} = \sum_i (A_i L_i + B_i M_i + C_i N_i)$$

Опредѣлимъ величины $A_i$, $B_i$ и $C_i$ такъ, чтобы 1° онѣ зависѣли лишь отъ $t$, $u_i$, $v_i$, $w_i$, $u'_i$, $v'_i$ и $w'_i$ соотвѣтственно, и 2°, чтобы множитель при каждомъ $m_i$ въ лѣвой части уравненія $A'$) обратился въ производную по $t$ отъ нѣкоторой функціи $\varphi_i$. Это опредѣленіе и составитъ задачу настоящей статьи.

Допуская, что оно выполнено и полагая:

$$\text{B)}\quad \sum_i m_i \varphi_i = F,$$

найдемъ, вмѣсто $A'$):

$$C)\quad \frac{dF}{dt} = \sum_i (A_i L_i + B_i M_i + C_i N_i).$$

§ III. Изъ постановки задачи слѣдуетъ:

$$9)\quad A_i \frac{d}{dt}\left(\frac{u'_i}{u_i^2+v_i^2+w_i^2}\right) + B_i \frac{d}{dt}\left(\frac{v'_i}{u_i^2+v_i^2+w_i^2}\right) + C_i \frac{d}{dt}\left(\frac{w'_i}{u_i^2+v_i^2+w_i^2}\right) = \frac{d\varphi_i}{dt}$$

Лѣвая часть содержитъ, по предположенію, лишь $t$, $u_i$, $v_i$, $w_i$, $u'_i$, $v'_i$, $w'_i$ и вторыя производныя:

$$10)\quad u_i'' = \frac{du'_i}{dt},\quad v''_i = \frac{dv'_i}{dt},\quad w''_i = \frac{dw'_i}{dt};$$

Слѣдовательно, функція $\varphi_i$ должна содержать лишь $t$, $u_i$ $v_i$, $w_i$, $u'_i$ $v'_i$ и $w'_i$. Обращая вниманіе на это и раскрывая уравненіе 9), получимъ:

$$11)\quad \frac{Au''+Bv''+Cw''}{u^2+v^2+w^2} - \frac{2(uu'+vv'+ww')\ (Au'+Bv'+Cw')}{(u^2+v^2+w^2)^2} = \\ = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}u' + \frac{\partial\varphi}{\partial v}v' + \frac{\partial\varphi}{\partial w}w' + \frac{\partial\varphi}{\partial u'}u'' + \frac{\partial\varphi}{\partial v'}v'' + \frac{\partial\varphi}{\partial w'}w'',$$

гдѣ значекъ $i$ опущенъ. Отсюда выводимъ:

$$D)\quad A = (u^2+v^2+w^2)\ \frac{\partial\varphi}{\partial u'},\quad B = (u^2+v^2+w^2)\ \frac{\partial\varphi}{\partial v'},$$

$$C = (u^2+v^2+w^2)\ \frac{\partial\varphi}{\partial w'}.$$

Внеся эти значенія въ 11), найдемъ для опредѣленія $\varphi$ уравненіе:

$$E)\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}u' + \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}v' + \frac{\partial\varphi}{\partial w}w' +$$

$$+\frac{2(uu'+vv'+ww')}{u^2+v^2+w^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u'}u' + \frac{\partial\varphi}{\partial v'}v' + \frac{\partial\varphi}{\partial w'}w'\right)=o,$$

интегрированіемъ котораго мы и займемся.

§ IV. Уравненіе $E$) эквивалентно системѣ:

$$F)\ \frac{dt}{1}=\frac{du}{u'}=\frac{dv}{v'}=\frac{dw}{w'}=\frac{(u^2+v^2+w^2)du'}{2u'(uu'+vv+ww')}=$$

$$=\frac{(u^2+v^2+w^2)dv'}{2v'(uu'+vv'+ww')}=\frac{(u^2+v^2+w^2)dw'}{2w'(uu'+vv'+w')}$$

Нужно найти 6 независимыхъ интеграловъ этой системы

$$\psi_1=\alpha_1\ ,\ \psi_2=\alpha_2\ ,\ .\ .\ \psi_6=\alpha_6,$$

гдѣ $\alpha_1$ , . . $\alpha_6$—произвольныя постоянныя. Искомая функція $\varphi$ будемъ произвольной функціей отъ $\psi_1$ , $\psi_2$ , . . $\psi_6$.

Замѣчая, что равенство второй, третьей и четвертой изъ дробей, входящихъ въ $F$), влечетъ за собой равенство каждой изъ нихъ дроби:

$$\frac{2(udu+vdv+wdw)}{2(uu'+vv'+ww')}=\frac{d(u^2+v^2+w^2)}{2(uu'+vv'+ww')},$$

найдемъ изъ $F$):

$$\frac{du'}{u'}=\frac{dv'}{v'}=\frac{dw'}{w'}=\frac{d(u^2+v^2+w^2)}{u^2+v^2+w^2},$$

откуда

$$12)\ u'=C_1(u^2+v^2+w^2),\ v'=C_2(u^2+v^2+w^2),$$
$$w'=C_3(u^2+v^2+w^2),$$

гдѣ $C_1$, $C_2$ и $C_3$—произвольныя постоянныя. Внеся эти значенія въ первыя три уравненія $F$), получимъ:

$$13)\quad \frac{du}{C_1}=\frac{dv}{C_2}=\frac{dw}{C_3}=dt(u^2+v^2+w^2)=\frac{udu+vdv+wdw}{C_1u+C_2v+C_3w}=$$

$$=\frac{C_1du+C_2dv+C_3dw}{C_1{}^2+C_2{}^2+C_3{}^2},$$

откуда прежде всего слѣдуетъ:

$$14)\quad \begin{cases} u=\dfrac{C_1}{C_1{}^2+C_2{}^2+C_3{}^2}\,(C_1u+C_2v+C_3w)+C_4, \\ v=\dfrac{C_2}{C_1{}^2+C_2{}^2+C_3{}^2}\,(C_1u+C_2v+C_3w)+C_5, \\ w=\dfrac{C_3}{C_1{}^2+C_2{}^2+C_3{}^2}\,(C_1u+C_2v+C_3w)+C_6, \end{cases}$$

гдѣ $C_4$, $C_5$ и $C_6$—произвольныя постоянныя. Далѣе послѣднее изъ ур-ій 13) даетъ:

$$15)\quad u^2+v^2+w^2=\frac{(C_1u+C_2v+C_3w)^2}{C_1{}^2+C_2{}^2+C_3{}^2}+C_7{}^2$$

гдѣ $C_7$—означаетъ произвольное постоянное, вещественное въ силу тожества:

$$(C_1{}^2+C_2{}^2+C_3{}^2)\,(u^2+v^2+w^2)-(C_1u+C_2v+C_3w)^2=$$
$$=(C_2w-C_3v)^2+(C_3u-C_1w)^2+(C_1v-C_2u)^2.$$

Вставляя наконецъ значеніе 15) суммы $(u^2+v^2+w^2)$ въ уравненіе 13):

$$dt(u^2+v^2+w^2)=\frac{C_1du+C_2dv+C_3dw}{C_1{}^2+C_2{}^3+C_3{}^2},$$

получимъ:

$$dt=\frac{C_1du+C_2dv+C_3dw}{(C_1u+C_2v+C_3w)^2+C_7{}^2(C_1{}^2+C_2{}^2+C_3{}^2)},$$

откуда

$$16)\ t - \frac{1}{C_7\sqrt{C_1+C_2^2+C_3^3}} \text{ arc tang } \frac{C_1u+C_2v+C_3w}{C_7\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}} = C_8.$$

гдѣ $C_8$—новое произвольное постоянное.

Уравненія 12), 14), 15) и 16) представляютъ восемь интеграловъ системы $F$. Между ними лишь 6 независимыхъ, какъ и слѣдовало ожидать. Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ уравненія 14) на $C_1$, $C_2$ и $C_3$ соотвѣтственно и сложивъ результаты, получимъ:

$$17)\ C_1C_4+C_2C_5+C_3C_6=o$$

Возвысивъ тѣ же уравненія въ квадратъ и сложивъ результаты, найдемъ на основаніи уравненій 15) и 17.

$$18)\ C_4^2+C_5^2+C_6^2=C_7^2.$$

Итакъ между 8 постоянными $C$ имѣются два соотношенія; слѣдовательно, лишь 6 изъ нихъ независимы между собой. Можно было бы поэтому 2 изъ нихъ выразить чрезъ 6 остальныхъ. Но мы этого дѣлать не станемъ, а сохранимъ всѣ 8 постоянныхъ $C$, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, полученныя выше уравненія лишились бы своей простоты и симметріи.

Полученные результаты можно истолковать слѣдующимъ образомъ.

Пусть $C_1$, $C_2$, $C_3$—прямоугольныя координаты точки $\gamma$, $C_4$, $C_5$, $C_6$—точки $\gamma'$, $u$, $v$, $w$—точки $\varrho$, $O$—начало координатъ.

Изъ формулъ 17 и 18 слѣдуетъ:

$$O\gamma'=C_7,\ \angle\gamma O\gamma'=d.$$

Далѣе, если $\lambda$, $\mu$, $\nu$—направляющіе cos'ы плоскости $\gamma o\gamma'$, то изъ формулъ 14), слѣдуетъ:

$$u\lambda+v\mu+w\nu=\frac{C_1u+C_2v+C_3w}{C_1^2+C_2^2+C_3^2}(C_1\lambda+C_2\mu+C_3\nu)+$$
$$+C_4\lambda+C_5\mu+C_6\nu=o,$$

т. е. *линіи* $O\gamma$, $O\rho$ *и* $O\gamma'$ *лежатъ въ одной плоскости*. Наконецъ изъ формулъ 14) выводимъ

$$uC_4+vC_5+wC_6=C_4^{\,2}+C_5^{\,2}+C_6^{\,2}=C_7^{\,2},$$

въ силу 17) и 18). Отсюда на основаніи сказаннаго слѣдуетъ что геометрическое мѣсто точекъ $\rho$ есть прямая, проведенная чрезъ точку $\gamma'$ параллельно прямой $O\gamma$. Таковъ геометрическій смыслъ интеграловъ 14) и 15). Введемъ теперь уголъ

$$\angle \rho O\gamma'=\varphi.$$

Очевидно:

$$tg\varphi=\frac{\rho\gamma'}{O\gamma'}=\frac{C_1u+C_2v+C_3w}{C_7\sqrt{C_1^{\,2}+C_2^{\,2}+C_3^{\,2}}}.$$

Слѣдовательно, интегралу 16) можно придать видъ:

$$t-\frac{1}{O\gamma'.O\gamma}\,\varphi=C_8.$$

§ V. Займемся теперь приведеніемъ полученныхъ интеграловъ къ виду:

$$\psi_1=C_1,\ \psi_2=C_2,\ \ldots\ \psi_8=C_8.$$

Уравненія 12) даютъ:

$$\text{I)}\ C_1=\frac{u'}{u^2+v^2+w^2},\ C_2=\frac{v'}{u^2+v^2+w^2},\ C_3=\frac{w'}{u^2+v^2+w^2},$$

откуда

$$C_1^{\,2}+C_2^{\,2}+C_3^{\,2}=\frac{u'^2+v'^2+w'^2}{(u^2+v^2+w)^2};$$

$$C_1u+C_2v+C_3w=\frac{uu'+vv'+ww'}{u^2+v^2+w^2}$$

Слѣдовательно,

$$\frac{(C_1u+C_2v+C_3w)^2}{C_1{}^2+C_2{}^2+C_3{}^2}=\frac{(uu'+vv'+ww')^2}{u'^2+v'^2+w'^2}.$$

Пользуясь этой формулой, мы преобразуемъ уравненія 14), 15) и 16) въ слѣдующія:

$$\text{II)}\quad C_7{}^2=\frac{(vw'-wv')^2+(w'u-wu')^2+(uv'-vu')^2}{u'^2+v'^2+w'^2};$$

$$\text{III)}\quad C_8=t-\frac{u^2+v^2+w^2}{\sqrt{(vw'-wv')^2+(wu'-uw')^2+(uv'-vu')^2}}\times$$
$$\times\operatorname{arc\,tang}\frac{uu'+vv'+ww'}{\sqrt{(vw'-wv')^2+(wu'-uw')+(uv'-vu')^2}};$$

$$\text{IV)}\quad\begin{cases} C_4=u-\dfrac{u'(uu'+vv'+ww')}{u'^2+v'^2+w'^2} \\[2ex] C_5=v-\dfrac{v'(uu'+vv'+ww')}{u'^2+v'^2+w'^2}, \\[2ex] C_6=w-\dfrac{w'(uu'+vv'+ww')}{u'+v'^2+w'^2}. \end{cases}$$

Напомнимъ, что между постоянными имѣются 2 соотношенія 17) и 18) Результатомъ всего, до сихъ поръ сказаннаго, является слѣдующее предложеніе:

*Теорема* I. Формулы

$$D)\quad A_i=(u_i{}^2+v_i{}^2+w_i{}^2)\,\frac{\partial\varphi_i}{\partial u'_i},\quad B_i=(u_i{}^2+v_i{}^2+w_i{}^2)\frac{\partial\varphi_i}{\partial v'_i},$$
$$C_i=(u_i{}^2+v_i{}^2+w_i{}^2)\,\frac{\partial\varphi_i}{\partial w'_i},$$

гдѣ $\varphi_i$—произвольная функція отъ величинъ $C_1{}^i$, $C_2{}^i$, .. $C_8{}^i$, опредѣляемыхъ формулами I, II, III и IV и связанныхъ двумя зависимостями 17) и 18), представляютъ самое общее выраженіе коэффиціентовъ системы варіацій:

$$\delta u_i=A_i\tau,\ \delta v_i=B_i\tau,\ \delta w_i=C_i\tau,$$

обладающихъ слѣдующими свойствами: $1^0$. каждые три коэффиціента $A_i$, $B_i$ и $C_i$ содержатъ лишь $t$, $u_i$, $v_i$ и $w_i$, $u'_i$, $v'_i$ и $w'_i$ $2^0$. множитель при каждомъ $m_i$ въ лѣвой части основнаго уравненія обращается въ производную по $t$ отъ функціи $\varphi_i$.

*Примѣчаніе.* Въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ нужно будетъ провѣрить, удовлетворяютъ ли величины $A_i$, $B_i$, $C_i$, опредѣляемыя формулами $D$), уравненіямъ 7) § II. Къ изслѣдованію этого вопроса въ общемъ случаѣ надѣемся еще вернуться.

§ VI. Разсмотримъ въ заключеніе нѣкоторые частные случаи.

$1^0$ *Коэффиціенты $A_i$, $B_i$ и $C_i$ не содержатъ $t$.*

Въ этомъ случаѣ, какъ легко убѣдиться, функція $\varphi$ должна содержать $C_8$ *лишь линейно, такъ что*

$$\varphi = \gamma C_8 + Q\ ,$$

гдѣ $\gamma$—постоянная величина, $Q$—произвольная функція отъ $C_1$, $C_2$, . . $C_7$.

Въ самомъ дѣлѣ, въ разсматриваемомъ случаѣ изъ формулъ $D$) слѣдуетъ:

$$19)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u'\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v'\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial w'\partial t} = o.$$

Слѣдовательно, производная

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial C_8} = \lambda$$

не содержитъ $u'$, $v'$ и $w'$. Докажемъ, что эта производная есть величина постоянная. Для этого возьмемъ производную по $t$ отъ лѣвой части ур-ія $E$), опредѣляющаго функцію $\varphi$. Это дастъ въ силу 19):

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} + u'\frac{\partial\lambda}{\partial u} + v'\frac{\partial\lambda}{\partial v} + w'\frac{\partial\lambda}{\partial w} = o.$$

Такъ какъ $\lambda$ не содержитъ $u'$, $v'$, $w'$, то отсюда заключаемъ:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{\partial\lambda}{\partial w} = o.\ \ Q.\ E.\ D.$$

Слѣдовательно, функція $\varphi$, дѣйствительно, имѣетъ указанный выше видъ

2°. *Коэффиціенты* $A_i$, $B_i$, $C_i$ *не содержатъ* $t$, $u_i$, $v_i$, $w_i$.

Въ этомъ случаѣ, какъ видно изъ формулъ $D$),

$$\varphi = \frac{\psi_1(u', v', w')}{u^2+v^2+w^2} + \psi_2 \ (t, u, v, w),$$

гдѣ $\psi_1$ и $\psi_2$—функціи отъ указанныхъ аргументовъ. Отсюда выводимъ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\psi_2}{\partial t}; \ \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\psi_2}{\partial u} - \frac{2u}{(u^2+v^2+w^2)^2}\psi_1; \ \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial\psi_2}{\partial v} -$$

$$-\frac{2v}{(u^2+v^2+w^2)^2}\psi_1; \ \frac{\partial\varphi}{\partial w} = \frac{\partial\psi_2}{\partial w} - \frac{2w}{(u^2+v^2+w^2)^2}\psi_1,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u'} = \frac{\frac{\partial\psi_1}{\partial u'}}{u^2+v^2+w^2}, \ \frac{\partial\varphi}{\partial v'} = \frac{\frac{\partial\psi_1}{\partial v'}}{u^2+v^2+w^2}, \ \frac{\partial\varphi}{\partial w'} = \frac{\frac{\partial\psi_1}{\partial w'}}{u^2+v^2+w^2}.$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе $E$), найдемъ:

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + u'\frac{\partial\psi_2}{\partial u} + v'\frac{\partial\psi_2}{\partial v} + w'\frac{\partial\psi_2}{\partial w} + \frac{2(uu'+vv'+ww')}{(u^2+v^2+w^2)^2} \times$$

$$\times \left\{ u'\frac{\partial\psi_1}{\partial u'} + v'\frac{\partial\psi_1}{\partial v'} + w'\frac{\partial\psi_1}{\partial w'} - \psi_1 \right\} = o.$$

Это уравненіе распадается на два:

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2}{\partial u}u' + \frac{\partial\psi_2}{\partial v}v' + \frac{\partial\psi_2}{\partial w}w' = o; \ u'\frac{\partial\psi_1}{\partial u'} + v'\frac{\partial\psi_1}{\partial v'} + w'\frac{\partial\psi_1}{\partial w'} = \psi_1$$

Замѣчая, что $\psi_2$ не содержитъ $u'$, $v'$ и $w'$, заключаемъ изъ перваго уравненія:

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = \frac{\partial\psi_2}{\partial u} = \frac{\partial\psi_2}{\partial v} = \frac{\partial\psi_2}{\partial w} = o,$$

т. е. $\psi_2$—постоянная величина. Изъ втораго уравненія слѣдуетъ, что $\psi_1$—однородная функція первой степени. Слѣдовательно, если $k$—произвольный множитель, то,

$$\psi_1\ (ku',\ kv',\ kw') = k\psi_1\ (u',\ v',\ w').$$

Полагая.

$$k = \frac{1}{u^2+v^2+w^2},$$

Найдемъ изъ послѣдняго уравненія въ силу формулъ I)-

$$\psi_1\ (C_1,\ C_2,\ C_3) = \frac{\psi_1(u',\ v',\ w')}{u^2+v^2+w^2},$$

откуда

$$\varphi = \psi_1\ (C_1,\ C_2,\ C_3) + \text{const}.$$

Итакъ *въ этомъ случаѣ* $\varphi$*—однородная функція первой степени величинъ* $C_1$, $C_2$ *и* $C_3$, *сложенная съ произвольной постоянной.*

3°. *Коэффиціенты* $A_i$, $B_i$, *и* $C_i$ *зависятъ лишь отъ* $u_i$, $v_i$ *и* $w_i$.

Въ этомъ случаѣ производныя

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u'} = \varphi_1,\ \frac{\partial\varphi}{\partial v'} = \varphi_2,\ \frac{\partial\varphi}{\partial w'} = \varphi_3$$

зависятъ лишь отъ $u$, $v$ и $w$. Слѣдовательно,

$$\varphi = u'\varphi_1 + v'\varphi_2 + w'\varphi_3 + \varphi_4,$$

гдѣ $\varphi_4$—неизвѣстная пока функція отъ $t$, $u$, $v$ и $w$. Внеся это значеніе въ $E$), найдемъ:

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial t}+u'\frac{\partial\varphi_4}{\partial u}+v'\frac{\partial\varphi_4}{\partial v}+w'\frac{\partial\varphi_4}{\partial w}+$$

$$+u'^2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}+\frac{2u\varphi_1}{u^2+v^2+w^2}\right)+v'^2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}+\frac{2v\varphi_2}{u^2+v^2+w^2}\right)+$$

$$+w'^2\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}+\frac{2w\varphi_3}{u^2+v^2+w^2}\right)+$$

$$+u'v'\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}+\frac{2}{u^2+v^2+w^2}(u\varphi_2+v\varphi_1)\right]+$$

$$+u'w'\left[\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}+\frac{2}{u^2+v^2+w^2}(u\varphi_3+w\varphi_1)\right]+$$

$$+v'w'\left[\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial w}+\frac{2}{u^2+v^2+w^2}(v\varphi_3+w\varphi_2)\right]=o.$$

Замѣчая, что функціи $\varphi$ не содержатъ $u'$, $v'$ и $w'$, заключаемъ отсюда:

$$\alpha)\ \frac{\partial\varphi_4}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_4}{\partial u}=\frac{\partial\varphi_4}{\partial v}=\frac{\partial\varphi_4}{\partial w}=o;$$

$$\beta)\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}+\frac{2u\varphi_1}{u^2+v^2+w^2}=o;\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}+\frac{2v\varphi_2}{u^2+v^2+w^2}=o;$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial w}+\frac{2w\varphi_3}{u^2+v^2+w^2}=o;$$

$$\gamma)\ \begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}+\dfrac{2}{u^2+v^2+w^2}(u\varphi_2+v\varphi_1)=o,\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial w}+\dfrac{2}{u^2+v^2+w^2}(u\varphi_3+w\varphi_1)=o.\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v}+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial w}+\dfrac{2}{u^2+v^2+w^2}(v\varphi_3+w\varphi_2)=o.\end{cases}$$

Уравненія $\alpha$) даютъ:

$$A)\ \varphi_4 = \text{const}.$$

Изъ уравненій $\beta$) слѣдуетъ:

$$B)\ \varphi_1(u^2+v^2+w^2)=F_1(v,\ w);\ \ \varphi_2(u^2+v^2+w^2)=F_2(w,u),$$
$$\varphi_3(u^2+v^2+w^2)=F_3(u,\ v),$$

гдѣ $F_1$, $F_2$, $F_3$—неизвѣстныя пока функціи указанныхъ въ скобкахъ аргументовъ. Помощью уравненій $B$) мы легко преобразуемъ уравненія $\gamma$) въ слѣдующія:

$$\delta)\ \frac{\partial F_1}{\partial v}+\frac{\partial F_2}{\partial u}=o;\ \frac{\partial F_2}{\partial w}+\frac{\partial F_3}{\partial v}=o;\ \frac{\partial F_3}{\partial u}+\frac{\partial F_1}{\partial w}=o.$$

Эти уравненія даютъ, если обратимъ вниманіе на аргументы функцій $F$:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 F_2}{\partial w^2}=o;\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial w^2}=\frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2}=o;\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 F_3}{\partial v^2}=o,$$

откуда

$$\Gamma)\ \begin{aligned} F_1 &= a_1+b_1 v+c_1 w+d_1 vw \\ F_2 &= a_2+b_2 w+c_2 u+d_2 wu \\ F_3 &= a_3+b_3 u+c_3 v+d_3 uv, \end{aligned}$$

гдѣ $a$, $b$, $c$ и $d$—12 произвольныхъ постоянныхъ. Внеся полученныя значенія въ $\delta$, найдемъ между постоянными слѣдующія соотношенія:

$$\varepsilon)\ d_1+d_2=o,\ d_2+d_3=o,\ d_3+d_1=o.$$

$$\zeta)\ b_1+c_2=o,\ b_2+c_3=o,\ b_3+c_1=o.$$

Изъ уравненія $\varepsilon$) вытекаетъ:

$$d_1=d_2=d_3=o.$$

Изъ уравненій $\zeta$), полагая:

$$b_1 = R,\ b_2 = P,\ b_3 = Q,$$

выводимъ:

$$c_1 = -Q,\ c_2 = -R,\ c_3 = -P;$$

слѣдовательно, формулы $\Gamma$ примутъ видъ:

$$F_1 = a_1 + Rv - Qw,$$

$$F_2 = a_2 + Pw - Ru,$$

$$F_3 = a_3 + Qu - Pv,$$

въ силу чего уравненія $B$) будутъ:

$$Д)\quad \varphi_1 = \frac{1}{u^2+v^2+w^2}\ (a_1 + Rv - Qw);$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{u^2+v^2+w^2}(a_2 + Pw - Ru),\ \varphi_3 = \frac{1}{u^2+v^2+w^2}\ (a_3 + Qu - Pv),$$

въ силу чего функція $\varphi$ и коэффиціенты $A$, $B$ и $C$ системы варіацій опредѣляются изъ формулъ:

$$E)\ \begin{cases} \varphi = \dfrac{u'A + v'B + w'C}{u^2+v^2+w^2} \\ A = a_1 + Rv - Qw;\ B = a_2 + Pw - Ru;\ C = a_3 + Qu - Pv \end{cases}$$

Легко видѣть, что въ данномъ случаѣ функція $\varphi$ выражается чрезъ постоянныя $C_1$, $C_2$, .. слѣдующимъ образомъ:

$$\varphi = a_1\ C_1 + a_2\ C_2 + a_3\ C_3 - P(C_5C_3 - C_6C_2) - Q(C_6C_1 - C_4C_3) -$$
$$- R(C_4C_2 - C_5C_1) + \text{const}.$$

## II.

§ I. Примѣнимъ тотъ же пріемъ къ уравненіямъ:

$$1)\quad \begin{cases} m_i \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{u'_i}{u_i'^2+v_i'^2+w_i'^2}\right)=L_i+\sum\limits_s \lambda_s \dfrac{\partial f_s}{\partial u_i}, \\ m_i \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v'_i}{u_i'^2+v_i'^2+w_i'^2}\right)=M_i+\sum\limits_s \lambda_s \dfrac{\partial f_s}{\partial v_i}, \quad (i=1,2.3,..n) \\ m_i \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{w'_i}{u_i'^2+v_i'^2+w_i'^2}\right)=N_i+\sum\limits_s \lambda_s \dfrac{\partial f_s}{\partial w_i}, \end{cases}$$

$$2)\ f_1=o,\ f_2=o,\ ..\ f_k=o,\ (3n-k=\mu>o),$$

гдѣ смыслъ обозначеній прежній. Введя снова варіаціи $\delta u_i$, $\delta v_i$ и $\delta w_i$, допускаемыя условными уравненіями 2), придемъ къ слѣдующей основной формулѣ:

$$3)\ \sum_s m_i \left\{\delta u_i \frac{d}{dt}\left(\frac{u'_i}{u'^2_i+v'^2_i+w'^2_i}\right)+\delta v \frac{d}{dt}\left(\frac{v'_i}{u'^2_i+v'^2_i+w'^2_i}\right)+\right.$$
$$\left.+\delta w_i \frac{d}{dt}\left(\frac{w'_i}{u'^2_i+v'^2_i+w'^2_i}\right)\right\}=\Sigma(L_i\delta u_i+M_i\delta v_i+N_i\delta w_i).$$

Пусть снова $A_i$, $B_i$ и $C_i$—коэффиціенты возможной системы варіацій. Сохраняя постановку предыдущей задачи, найдемъ для ихъ опредѣленія уравненіе:

$$A\frac{d}{dt}\left(\frac{u'}{u'^2+v'^2+w'^2}\right)+B\frac{d}{dt}\left(\frac{v'}{u'^2+v'^2+w'^2}\right)+$$
$$+C\frac{d}{dt}\left(\frac{w'}{u'^2+v'^2+w'^2}\right)=\frac{d\varphi}{dt},$$

гдѣ значекъ $i$ опущенъ, $\varphi$—неизвѣстная пока функція отъ $t$, $u$, $v$, $w$, $u'$, $v'$ и $w'$.

Раскрывая это уравненіе, найдемъ:

$$u''\left\{\frac{A}{u'^2+v'^2+w'^2}-\frac{2u'\ (Au'+Bv'+Cw')}{(u'^2+v'^2+w'^2)^2}\right\}+$$

$$+v''\left\{\frac{B}{u'^2+v'^2+w'^2}-\frac{2v'(Au'+Bv'+Cw')}{(u'^2+v'^2+w'^2)^2}\right\}+$$

$$+w''\left\{\frac{C}{u'^2+v'^2+w'^2}-\frac{2w'\ (Au'+Bv'+Cw')}{(u'^2+v'^2+w'^2)^2}\right\}=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}u'+\frac{\partial\varphi}{\partial v}v'+\frac{\partial\varphi}{\partial w}w'+\frac{\partial\varphi}{\partial u'}u''+\frac{\partial\varphi}{\partial v'}v''+\frac{\partial\varphi}{\partial w'}w''.$$

Сравненіе обѣихъ частей даетъ:

$$4)\ \left\{\begin{aligned}&\frac{A}{u'^2+v'^2+w'^2}-\frac{2u'\ (Au'+Bv'+Cw')}{(u'^2+v'^2+w'^2)^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial u'},\\&\frac{B}{u'^2+v'^2+w'^2}-\frac{2v'\ (Au'+Bv'+Cw')}{(u'^2+v'^2+w'^2)^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial v'},\\&\frac{C}{u'^2+v'^2+w'^2}-\frac{2w'\ (Au'+B'v+Cw')}{(u'^2+v'^2+w'^2)^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial w'};\end{aligned}\right.$$

для опредѣленія $\varphi$ нужно будетъ интегрировать уравненіе:

$$5)\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}u'+\frac{\partial\varphi}{\partial v}v'+\frac{\partial\varphi}{\partial w}w'=o.$$

Найдя $\varphi$ изъ этого уравненія, опредѣлимъ изъ 4) коэффиціенты $A$, $B$ и $C$. Уравненіе 5), очевидно, даетъ:

$$\text{I)}\ \varphi=F\ (tu'-u,\ tv'-v,\ tw'-w,\ u',\ w',\ w'),$$

гдѣ $F$—знакъ произвольной функціи.

§ II. Разсмотримъ лишь тотъ частный случай, когда *коэффиціенты* $A$, $B$ *и* $C$ *не содержатъ величинъ* $u'$, $v'$ и $w'$.

Замѣчая, что въ этомъ случаѣ уравненія 4) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u'} = \frac{\partial \lambda}{\partial u'}\,; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v'} = \frac{\partial \lambda}{\partial v'}\,; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial w'} = \frac{\partial \lambda}{\partial w'}\,; \quad \lambda = \frac{Au' + Bv' + Cw'}{u'^2 + v'^2 + w'^1}\,,$$

заключаемъ, что самое общее выраженіе $\varphi$ будетъ:

$$6)\quad \varphi = \frac{Au' + Bv' + Cw'}{u'^2 + v'^2 + w'^2} + F_1 \quad (t,\ u,\ v,\ w),$$

гдѣ $F_1$—произвольная функція указанныхъ перемѣнныхъ. Подстановка этого значенія въ уравненіе 5), которому должна удовлетворять функція $\varphi$, даетъ:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial u} u' + \frac{\partial F_1}{\partial v} v' + \frac{\partial F_1}{\partial w} w' + \frac{1}{u'^2 + v'^2 + w'^2} \left( u' \frac{\partial A}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + v' \frac{\partial B}{\partial t} + w' \frac{\partial C}{\partial t} \right) + \frac{1}{u'^2 + v'^2 + w'^2} \left\{ u' \left( u' \frac{\partial A}{\partial u} + v' \frac{\partial B}{\partial u} + w' \frac{\partial C}{\partial u} \right) + \right.$$

$$\left. + v' \left( u' \frac{\partial A}{\partial v} + v' \frac{\partial B}{\partial v} + w' \frac{\partial C}{\partial v} \right) + w' \left( u' \frac{\partial A}{\partial w} + v' \frac{\partial B}{\partial w} + w' \frac{\partial C}{\partial w} \right) \right\} = o.$$

Освободивъ уравненіе отъ знаменателя и приравнявъ нулю коэффиціенты при степеняхъ $u'$, $v'$ и $w'$, найдемъ:

$$7)\quad \frac{\partial F_1}{\partial u} = \frac{\partial F_1}{\partial v} = \frac{\partial F_1}{\partial w} = o\,; \quad 8)\quad \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t} = o$$

$$9)\quad \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial u} = o; \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial v} = o; \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial w} = o$$

$$10)\quad \frac{\partial C}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial w} = o; \quad \frac{\partial A}{\partial w} + \frac{\partial C}{\partial u} = o; \quad \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial v} = o$$

Системы 7) и 8) показываютъ, что $F_1$ зависитъ лишь отъ $t$, функціи же $A$, $B$ и $C$ не содержатъ $t$. Отсюда и изъ уравненій 9) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial A}{\partial u}=\frac{\partial B}{\partial v}=\frac{\partial C}{\partial w}=-\frac{\partial F_1}{\partial t}=a,$$

гдѣ $a$—произвольная постоянная. Слѣдовательно,

$$11)\quad A=au+\varphi_1\ (v,\ w),\ B=av+\varphi_2\ (w,\ u),\ C=aw+\varphi_3\ (u, v), \\ F_1=-at+b,$$

гдѣ $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\varphi_3$—неизвѣстныя пока функцiи указанныхъ перемѣнныхъ, $b$—новое произвольное постоянное. Подставляя значенiя 11) величинъ $A$, $B$ и $C$ въ 10, найдемъ:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}=0,\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial w}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}=0,\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial w}=0,$$

откуда, какъ изъ системы $\delta$) I, выведемъ:

$$\varphi_1=a_1+Rv-Qw,\ \varphi_2=a_2+Pw-Ru,\ \varphi_3=a_3+Qu-Pv,$$

гдѣ $a_1$, $a_2$, $a_3$, $P$, $Q$ и $R$—новыя произвольныя постоянныя. Въ силу найденныхъ значенiй величинъ $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\varphi_3$ мы можемъ представить уравненiе 6) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\text{II)}\quad \varphi=-at+b+\frac{1}{u'^2+v'^2+w'^2}\Big\{u'\ (a_1+au+Rv-Qw)+ \\ +v'\ (a_2+av+Pw-Ru)+w'\ (a_3+aw+Qu-Pv)\Big\}$$

Система уравненiй 1) обладаетъ любопытными свойствами, сближающими ее съ уравненiями динамики. Въ самомъ дѣлѣ, примѣняя къ формулѣ 3) тожество:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{u'\delta u+v'\delta v+w'\delta w}{u'^2+v'^2+w'^2}\right\}=\delta u\ \frac{d}{dt}\left(\frac{u'}{u'^2+v'^2+w'^2}\right)+ \\ +\delta v\ \frac{d}{dt}\left(\frac{v'}{u'^2+v'^2+w'^2}\right)+\delta w\ \frac{d}{dt}\left(\frac{w'}{u'^2+v'^2+w'^2}\right)+$$

$$+\frac{u'\delta u'+v'\delta v'+w'\delta w'}{u'^2+v'^2+w'^2},$$

мы представимъ ее въ слѣдующемъ видѣ, полагая для краткости:

$$A)\ \Sigma(L_i\delta u_i+M_i\delta v_i+N_i\delta w_i)=U';\ \Pi_i(u'^2_i+v'^2_i+v'^2_i)^{m_i}=2T,$$

$$\frac{d}{dt}\ \sum_i m_i\frac{u'_i\delta u_i+v'_i\delta v_i+w'_i\delta w_i}{u'^2_i+v'^2_i+w'^2_i}=U'+\delta\log\sqrt{2T}$$

Слѣдовательно, полагая для

$$A')\ \begin{cases}t=t_0\\ t=t_1\end{cases}\ \delta u_i=\delta v_i=\delta w_i=o,$$

$$B)\ \int_{t_0}^{t_1}dt(U'+\delta\log\sqrt{2T})=o.$$

Если есть функція $U$, для которой

$$C)\ L_i=\frac{\partial U}{\partial u_i},\ M_i=\frac{\partial U}{\partial v_i},\ N_i=\frac{\partial U}{\partial w_i},$$

то полученное уравненіе приметъ видъ:

$$D)\ \delta\int_{t_0}^{t_1}dt\ (U+\log\sqrt{2T})=o.$$

Уравненія $B$) и $D$) соотвѣтствуютъ принципу Гамильтона.

Пусть $q_1$, . . . $q_\mu$—$\mu$ независимыхъ перемѣнныхъ, помощью которыхъ величины $u$, $v$ и $w$ обращаютъ условныя уравненія 2) въ тожества. Обозначимъ для краткости:

$$\frac{dq_i}{dt}=q'_i$$

и допустимъ, что функція $U$ не содержитъ $u'$, $v'$ и $w'$. Она не будетъ, слѣдовательно, содержать величинъ $q'$. Обращаясь къ выраженію $A$) величины $2T$, заключаемъ, что она будетъ содержать $q'$. . Слѣдовательно,

$$\delta U = \Sigma \frac{dU}{\partial q_i}\delta q_i,\ \delta \log\sqrt{2T} = \Sigma_s \frac{\partial \log\sqrt{2T}}{\partial q_i}\delta q_i + \Sigma_s \frac{\partial \log\sqrt{2T}}{\partial q'_i}\delta q'_i.$$

Внеся эти значенія въ формулу $D$ и замѣчая, что въ силу условій $A'$)

$$\int dt \frac{\partial \log}{\partial q'_s}\sqrt{2T}\ \delta q'_s = \int dt \frac{\partial \log\sqrt{2T}}{\partial q'_s}\frac{d}{dt}\delta q_s =$$

$$= -\int dt \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \log\sqrt{2T}}{\partial q'_s}\right)\delta q_s,$$

найдемъ:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left\{\Sigma\left[\frac{\partial U}{\partial q_s} + \frac{\partial \log\sqrt{2T}}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \log\sqrt{2T}}{\partial q'_s}\right)\right]\delta q_s = o,\right.$$

откуда

$$E)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \log\sqrt{2T}}{\partial q'_s}\right) - \frac{\partial \log\sqrt{2T}}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s}.\ (s=1,\ 2,\ldots\ \mu)$$

Эти уравненія отвѣчаютъ второй формѣ Лагранжевыхъ уравненій динамики. Положимъ, что переходъ отъ перемѣнныхъ $u$, $v$, $w$ къ перемѣннымъ $q$ совершается посредствомъ формулъ, не содержащихъ $t$. Это, очевидно, возможно лишь въ томъ случаѣ, когда условныя уравненія не содержатъ $t$. Въ этомъ предположеніи

$$u' = \Sigma_s \frac{\partial u}{\partial q_s} q'_s,\ v' = \Sigma_s \frac{\partial v}{\partial q_s} q'_s,\ w' = \Sigma_s \frac{\partial w}{\partial q_s} q_s,$$

т. е. $u'$, $v'$ и $w'$—линейныя однородныя функціи величинъ $q'$. Но изъ выраженія $A$) величины $2T$ слѣдуетъ, что она—однородная функція степени $\mu = 2\Sigma_i m_i$ величинъ $u'$, $v'$ и $w'$. Отсюда вытекаетъ, что $T$—однородная функція степени $\mu$ величинъ $q'$. Слѣдовательно,

$$F)\ \mu T=\sum_s \frac{\partial T}{\partial q'_s}\, q'_s.$$

Полагая для краткости:

$$G)\ \log \sqrt{2T}=T_1,$$

введемъ новыя перемѣнныя:

$$H)\ \frac{\partial T_1}{\partial q'_s}=p_s.\ (s=1,\ 2,\ldots \mu).$$

Формула $G)$ даетъ:

$$J)\ \frac{\partial T_1}{\partial q'_s}=\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial q'_s}=p_s.$$

Слѣдовательно, въ силу $H)$ и $F)$:

$$K)\ \Sigma\ \frac{\partial T_1}{\partial q'_s}\, q'_s=\Sigma p_s q'_s=\frac{\mu}{2},$$

откуда дифференцированіемъ находимъ:

$$o=\Sigma q'_s dp_s+\Sigma p_s\ dq'_s,$$

$$o=2T\Sigma q'_s\ dp_s+2T\Sigma p_s\ dq'_s.$$

Но, если $T$—функція перемѣнныхъ $q_s$ и $q_s'$, то

$$dT=\Sigma\ \frac{\partial T}{\partial q_s}\ dq_s+\Sigma\ \frac{\partial T}{\partial q'_s}\ dq'_s.$$

Отнимая отъ этой формулы предыдущее уравненіе, получимъ въ силу формулъ $J$):

$$L)\ dT = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s - 2T\Sigma q'_s dp_s$$

Положимъ, что мы разрѣшили уравненія $H$) относительно $q'_1, q'_2, \ldots q'_s$ и внесли найденныя значенія въ $U$ и $T$. Первая изъ этихъ функцій не измѣнится, такъ какъ она величинъ $q'$ не содержала; вторая сдѣлается функціей всѣхъ $q_s$ и $p_s$. Въ этомъ предположеніи

$$dT = \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) dq_s + \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) dp_s,$$

гдѣ для отличія скобками обозначены новыя производныя. Сравнивая эту формулу съ $L$), получимъ:

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right);\ q'_s = -\frac{1}{2T}\left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right),$$

или въ силу $G$):

$$M)\ \frac{\partial T_1}{\partial q_s} = \left(\frac{\partial T_1}{\partial q_s}\right);\ q'_s = -\left(\frac{\partial T_1}{\partial p_s}\right)$$

Въ силу первой изъ этихъ формулъ и уравненій $H$) уравненіе $E$) приметъ видъ:

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial(T_1 + U)}{\partial p_s}$$

Замѣчая, что $p_s$ не входятъ въ $U$, мы вправѣ написать вторую изъ формулъ $M$) въ видѣ:

$$\frac{dq_s}{dt} = -\frac{\partial(T_1 + U)}{\partial p_s}.$$

Или, полагая:

$$\text{I)}\ T_1' + U = l\sqrt{2T} + U = H(t,\ q_1,\ q_2,\ q_\mu, \ldots p_1,\ p_2, \ldots p_\mu),$$

получимъ окончательно:

$$\text{II)}\ \frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_s};\ \frac{dq_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_s}\ (s=1,\ 2, \ldots \mu).$$

Эти уравненія отвѣчаютъ Гамильтоновой формѣ уравненій динамики. Въ нихъ $H$—функція отъ $t$, $q_s$ и $p_s$.

Далѣе легко провѣрить, что интегралы системы II даются формулами.

$$\text{III)}\ \frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s,\ \frac{\partial V}{\partial \alpha_s} = \beta_s\ (s=1,\ 2, \ldots \mu),$$

гдѣ

$$V = f\ (t,\ q_1,\ q_2, \ldots q_\mu,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_\mu) + \alpha$$

—общій интегралъ уравненія:

$$\text{IV)}\ \frac{\partial V}{\partial t} - H\left(t,\ q_1,\ q_1, \ldots q_\mu,\ \frac{\partial V}{\partial q_1},\ \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\right) = o,$$

содержащій, кромѣ прибавочнаго постояннаго $\alpha$, $\mu$ произвольныхъ постоянныхъ $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$.

Въ заключеніе пусть

$$\text{IV)}\ V = \frac{\mu}{2} t + \int_{t_0}^{t_1} dt\ (T_1 + U),$$

Образуемъ варіацію

$$\delta V = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt\ (T_1 + U).$$

Помощью передѣлокъ, уже встрѣчавшихся выше, найдемъ:

$$\delta V = \Big|_0^1 \Sigma \frac{\partial T_1}{\partial q'_s}\ \delta q_s + \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{\left[\frac{\partial U}{\partial q_s} + \frac{\partial T_1}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_s}\right)\right]\ \delta q_s\right.$$

Замѣчая, что множитель при $\delta q_s$ равенъ нулю въ силу уравненій $E$), получимъ на основаніи формулъ $H$):

$$\delta V = \Sigma p_s\ \delta q_s - \Sigma p^0_s\ \delta q^0_s.$$

Предполагая, что уравненія $E$) или II) объинтегрированы, мы выразимъ $S$ въ функціи $t$, $q_s$ и $q^0_s$, гдѣ $q^0_s$—начальныя значенія величинъ $q_s$. Слѣдовательно,

$$\delta V = \Sigma\ \frac{\partial V}{\partial q_s}\ \delta q_s + \Sigma\ \frac{\partial V}{\partial q^0_s}\ \delta q^0_s.$$

Сравнивая это выраженіе $\delta V$ съ предыдущимъ, найдемъ:

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s,\ \frac{\partial V}{\partial q^0_s} = -p^0_s.$$

Слѣдовательно, $V$—интегралъ уравненія IV. Провѣримъ это. Формула IV даетъ:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\mu}{2} + T_1 + U = \frac{\mu}{2} + H.$$

Но

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_s} q'_s = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma p_s q'_s,$$

откуда

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma p_s q'_s - \frac{\mu}{2} - H = 0.$$

Но по формулѣ $K$)

$$\Sigma p_s q'_s = \frac{\mu}{2},$$

слѣдовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial t} - H = o. \quad Q. E. D.$$

Итакъ вся теорія уравненій динамики, дѣйствительно, съ незначительными измѣненіями можетъ быть приложена къ системѣ 1).

III.

I. Разсмотримъ въ заключеніе уравненія динамики. Основная формула, соотвѣтствующая этому случаю, совпадаетъ съ принципомъ Даламбера:

$$1) \sum_i m_i\left(\frac{dx'_i}{dt}\delta x_i + \frac{dy'_i}{dt}\delta y_i + \frac{dz'_i}{dt}\delta z_i\right) = \Sigma(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i)$$

Если $A$, $B$ и $C$—коэффиціенты возможной системы перемѣщеній $\delta x$, $\delta y$ и $\delta z$, то при прежней постановкѣ задачи будемъ имѣть:

$$A\frac{dx'}{dt} + B\frac{dy'}{dt} + C\frac{dz'}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}x' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z' +$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\frac{dy'}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}\frac{dz'}{dt},$$

откуда

$$2)\ A=\frac{\partial\varphi}{\partial x'},\ B=\frac{\partial\varphi}{\partial y'},\ C=\frac{\partial\varphi}{\partial z'}.$$

Функція $\varphi$ опредѣлится изъ уравненія:

$$3)\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial\varphi}{\partial z}z'=o,$$

которое даетъ:

$$4)\ \varphi=(tx'-x,\ ty'-y,\ tz'-z,\ x',\ y',\ z'),$$

гдѣ $F$—знакъ произвольной функціи.

II. *Первый частный случай*: коэффиціенты $A$, $B$ и $C$ содержатъ лишь $x'$, $y'$ *и* $z'$. Формулы 2) показываютъ, что въ этомъ случаѣ

$$5)\ \varphi=F_1\ (x',\ y',\ z')+F_2(t,\ x,\ y,\ z),$$

гдѣ $F_1$ и $F_2$—неизвѣстныя пока функціи отъ указанныхъ перемѣнныхъ. Постановка этого значенія $\varphi$ въ 3) даетъ:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}+x'\frac{\partial F_2}{\partial x}+y'\frac{\partial F_2}{\partial y}+z'\frac{\partial F_2}{\partial z}=o.$$

Но $F_2$ не содержитъ $x'$, $y'$, $z'$; слѣдовательно,

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}=\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_2}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial z}=o;\ F_2=\text{const}.$$

Итакъ въ этомъ случаѣ

$$\varphi=F_1\ (x',\ y',\ z')+\text{const}.$$

II. *Второй частный случай*: коэффиціенты $A$, $B$ и $C$ содержатъ лишь $x$, $y$, $z$.

Формулы 2) даютъ въ этомъ случаѣ:

$$6)\ \varphi = \varphi_1 x' + \varphi_2\ y' + \varphi_3 z' + \varphi_4,$$

гдѣ $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$—функціи лишь отъ $x$, $y$, $z$, $\varphi_4$—функція отъ $(t, x, y, z)$. Подставляя это значеніе въ 3), найдемъ:

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_4}{\partial x}\, x' + \frac{\partial\varphi_4}{\partial y}\, y' + \frac{\partial\varphi_4}{\partial z}\ z' + x'\ \left(x'\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + y'\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + z'\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right) +$$
$$+ y'\left(x'\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + y'\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + z'\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right) +$$
$$+ z'\ \left(x'\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + y'\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + z'\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right) = o.$$

Приравнявъ нулю коэффиціенты при степеняхъ $x'$, $y'$ и $z'$, получимъ систему:

$$7)\ \frac{\partial\varphi_4}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_4}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_4}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_4}{\partial x} = o,$$

$$8)\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = o,$$

$$9)\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = o;\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} = o;\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = o.$$

Изъ уравненій 7) слѣдуетъ:

$$\varphi_4 = \text{const}.$$

Уравненія 8) показываютъ, что $\varphi_1$ не содержитъ $x$, $\varphi_2$— $y$ и $\varphi_3$—$z$. Слѣдовательно, уравненія 9) дадутъ:

$$\varphi_1 = a_1 + Ry - Qz,\ \ \varphi_2 = a_2 + Pz - Rx,\ \ \varphi_3 = a_3 + Qx - Py,$$

откуда

$$\varphi = x'\ \ (a_1 + Ry - Qz) + y'\ \ (a_2 + Pz - Rx) + z'\ \ (a_3 + Qx - Py) +$$

$$+\text{const.}=a_1x'+a_2y'+a_3z'+P(y'z-z'y)+Q\,(z'x-x'z)+R\,(x'y-y'x)+\text{const.}$$

Это выраженіе содержитъ въ себѣ, какъ частные случаи, интегралы движенія центра инерціи и интегралы площадей.

16 августа 1894 г.

*Д. Н. Зейлигеръ.*